УДК 519.615.5

О. В. Белякова

ЭФФЕКТИВНОСТЬ МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА С ПОЛУУКРУПНЕНИЕМ В КАЧЕСТВЕ СГЛАЖИВАЮЩЕЙ ИТЕРАЦИИ

Для решения систем линейных уравнений с блочнотрехдиагональной матрицей исследована эффективность применения многосеточного метода с полуукрупнением в качестве сглаживающей итерации. Представлены численные результаты исследования.

For solving systems of linear equations with block tridiagonal matrices there is considered an efficiency of multi-grid method with semi-coarse as smoothing iteration. Numerical results are presented.

Ключевые слова: многосеточный метод, сетки с полуукрупнением, системы линейных уравнений, сглаживающие итерации.

Key words: multi-grid method, semi-coarse grids, systems of linear equation, smoothing iterations.system of linear equations, block-tridiagonal matrix, method of cyclic reduction.

Введение

Численное решение краевых задач для двумерных эллиптических уравнений конечно-разностным методом, или методом Галеркина, приводит к необходимости решать системы линейных алгебраических уравнений с блочнотрехдиагональной матрицей

$$\mathbf{Au} = \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\mathbf{A} = \text{blocktridiag}\,(\mathbf{L}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{R}_i), \mathbf{L}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{R}_i \subset \Re^{m\times m}, i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Как известно (например, [1] — [4]), эффективным итерационным методом решения задачи (1) — (2) является многосеточный метод (MGM, MultiGrid Method). Эта эффективность связана с тем, что скорость сходимости MGM не зависит от количества неизвестных в системе.

В работе [5] для численного решения задачи Дирихле двумерного уравнения диффузии описан и исследован MGM с полуукрупнением сетки MGM_{SC}^{x} (SC — semi-coarse grids, укрупнение сетки в два раза выполнялось только по одному измерению x). В рассмотренном варианте многосеточного метода в качестве сглаживающих итераций применялся блочный метод Гаусса — Зейделя *zebra-line*. Доказано, что для случая постоянных коэффициентов в дифференциальном уравнении такой выбор сглаживающих итераций позволяет оценить константой двухсеточные параметры α_l, β_l в оценке оператора перехода MGM_{SC}^{x}:

$$\left\| M^{MGM_{SC}^{x}} \right\|_{\mathbf{A}} \le \max_{1 \le l \le \max level-1} (\alpha_l \cdot \beta_l), \;\; \alpha_l \le c_U \le 1, \beta_l \le c_D \le 1, c_U + c_D < 2. \qquad (3)$$

Здесь maxlevel обозначает общее количество используемых сеток при поиске решения на сетке с номером $l = 1$, с помощью α_l учитывается влияние сглаживающих итераций при переходе с мелкой сетки на крупную, β_l — при переходе с крупной на мелкую. Итак, сам оператор MGM_{SC}^{x} оценивается некоторой константой, меньшей единицы.

В данной работе для численного решения системы (1)—(2) с симметричной положительно определенной матрицей исследуется эффективность применения в качестве сглаживающих итераций многосеточного метода с полуукрупнением по второму измерению MGM_{SC}^{y}. Поскольку многосеточный метод трудоемкий, то рассматривались случаи сглаживающих итераций MGM_{SC}^{y} только на «подъеме», то есть при переходе с самой крупной сетки на самую мелкую сетку.

1. Описание многосеточного метода с полуукрупнением и многосеточными сглаживающими итерациями

Пусть решается система (1), в которой

$$\mathbf{A} = \text{blocktridiag}\,(\mathbf{L}_{i-1}, \mathbf{D}_i, \mathbf{L}_i), \mathbf{D}_i, \mathbf{L}_i \in \Re^{n_x \times n_x}, \mathbf{A} \in \Re^{n_x \cdot n_y \times n_x \cdot n_y}, \mathbf{A} > 0. \qquad (4)$$

Векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$ рассматриваются как блочные вектор-столбцы из $\Re^{n_x \cdot n_y}$:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_{n_x})^T, \mathbf{u} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_{n_x})^T, \mathbf{F}_i, \mathbf{U}_i \in \Re^{n_y}, i = 1, \ldots, n_x.$$

Для решения системы (1), (4) многосеточный метод MGM_{SC}^{x} использует последовательность систем $\mathbf{A}_{l_x} \mathbf{u}_{l_x} = \mathbf{f}_{l_x}$, $l_x = 1, \ldots, k_x$, в каждой из которых количество блоков $\mathbf{U}_i \in \Re^{n_y}$, $i = 1, \ldots, n_x^{l_x}$ неизвестного вектора $\mathbf{u}_{l_x}$ уменьшается, но их размерность остается неизменной; порядок перехода от одной системы к другой соответствует схеме V-цикла. Матрицы $\mathbf{A}_1$ вспомогательных систем строятся рекуррентно, при $l = 1$ $\mathbf{A}_l$ совпадает с матрицей заданной системы. $\mathbf{A}_{l+1}$ вычисляется по выбранному правилу, например, методом Галеркина или методом исключения строк в системе $\mathbf{A}_l$ (см.: [6]):

$$\mathbf{A}_{l+1} = \text{reduce}(\mathbf{A}_l). \qquad (5)$$

В результате получается матрица той же структуры, которую имеет исходная матрица $\mathbf{A}_{l+1} = \text{blocktridiag}\,(\mathbf{L}_{i-1}^{(l+1)}, \mathbf{D}_i^{(l+1)}, \mathbf{L}_i^{(l+1)})$.

Многосеточный метод MGM_{SC}^{y} полностью аналогичен MGM_{SC}^{x}, но применяется к системе с другим порядком уравнений:

$$\mathbf{A} = \text{blocktridiag}\,(\mathbf{L}'_{i-1}, \mathbf{D}'_i, \mathbf{L}'_i), \mathbf{D}'_i, \mathbf{L}'_i \in \Re^{n_y \times n_y}, \mathbf{A} \in \Re^{n_y \cdot n_x \times n_y \cdot n_x}, \mathbf{A} > 0 \qquad (4')$$

Обозначим через m_U количество сглаживающих итераций после перехода с крупной сетки на следующую более мелкую (при «подъеме»), m_D — количество сглаживающих итераций перед переходом с мелкой сетки на следующую более крупную (при «спуске»). Итерацию MGM_{SC}^{x} удобно описать с помощью псевдокода следующим образом:

```
1   ly=1;
2   for lx =1 to kx – 1 do
3   BlockGS_x (lx, ly, mD ); {сглаживающие итерации Гаусса - Зейделя}
5   Coarse_f_x (lx, ly); {отображение правой части системы на сетку (lx + 1)}
6   endfor;
7   lx = kx; { kx – номер самой грубой сетки}
8   SolveInLine_x (lx, ly); {точное решение системы }
9   While lx > 1 do
10  Plolongation_x (lx, ly); { продолжение решения на сетку (lx - 1) }
11  lx = lx – 1;
12  BlockGS_x (lx, ly, mU );
13  endwhile
```

Обозначим описанный алгоритм $MGM_{SC}^{1}(m_U, m_D)$. Через MGM_{SC}^{2} обозначим алгоритм, полученный из $MGM_{SC}^{1}(\mathrm{m}_U, m_D)$ заменой оператора сглаживающей итерации на «подъеме» в строке 12 оператором:

if lx=1 then $MGM_{SC}^{y}(lx, m_U, m_D)$ **else BlockGS_x (l_x, l_y,** m_U **),**

который приведет к тому, что только на самой мелкой сетке будет выполняться многосеточная сглаживающая итерация, а на других — сглаживающие итерации блочного метода Гаусса — Зейделя.

Через $MGM_{SC}^{3}(\mathrm{m}_U, m_D)$ обозначим алгоритм, полученный из алгоритма $MGM_{SC}^{1}(\mathrm{m}_U, m_D)$ заменой оператора сглаживающей итерации на «подъеме» в строке 12 оператором

if lx<>1 then $MGM_{SC}^{y}(lx, m_U, m_D)$ **else BlockGS_x (l_x, l_y,** m_U**),**

который приведет к тому, что на всех сетках, кроме самой мелкой, будет выполняться многосеточная сглаживающая итерация, а на самой мелкой — сглаживающие итерации блочного метода Гаусса — Зейделя.

Обозначим через $MGM_{SC}^{4}(\mathrm{m}_U, m_D)$ алгоритм, который получается из $MGM_{SC}^{1}(\mathrm{m}_U, m_D)$ заменой оператора в строке 12 оператором $MGM_{SC}^{y}(lx, m_U, m_D)$; на всех сетках в качестве сглаживающей итерации будет использоваться многосеточная итерация с полуукрупнением.

Оценим далее стоимость каждого из описанных алгоритмов.

2. Оценка вычислительной сложности алгоритмов

Оценим и сравним количество арифметических операций, необходимых для выполнения каждой из итераций $MGM_{SC}^{k}, k = 1, 2, 3, 4.$ Элементы матриц вспомогательных систем вычисляются один раз, поэтому не будем включать эти вычисления в общий объем работы.

Обозначим через $C^{GS} n_x n_y$ количество операций на выполнение сглаживающей итерации блочным методом Гаусса — Зейделя для приближенного решения системы размером $n_x n_y$, C^{GS} — положительная константа, не зависящая от n_x, n_y; через $C^S \frac{n_x}{2} n_y$ — количество операций на выполнение отображения правой части системы и операции продолжения на сетку размером $\frac{n_x}{2} n_y$. C^S в силу простоты операторов Coarse_f_x и Plolongation_x примерно соответствует константе при оценке количества действий для одной итерации Зейделя ($C^S << C^{GS}$). Подсчитаем число арифметических операций, необходимых для выполнения $MGM^1_{SC}(\mathrm{m_U}, m_D)$ (стоимость одной итерации).

При «спуске» выполняются арифметические действия в количестве

$$m_D C^{GS} n_x n_y (1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k_x-1}})+C^S n_x n_y(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k_x}}) \approx n_x n_y (2m_D C^{GS}+C^S) \quad (6)$$

(последняя вспомогательная система решается точно прогонкой).

При «подъеме» выполняется $m_U C^{GS} n_x n_y (\frac{1}{2^{k_x-1}}+\ldots+\frac{1}{2}+1) \approx 2m_U C^{GS} n_x n_y$ действий. При выполнении одной итерации $MGM^1_{SC}(\mathrm{m_U}, m_D)$ требуется примерно $n_x n_y((2m_D+2m_U)C^{GS}+C^S)$ действий.

В силу определений на «спуске» в $MGM^k_{SC}, k=2,3,4$ затрачивается такое же количество операций (6), что и в $MGM^1_{SC}(\mathrm{m_U}, m_D)$. На «подъеме» в них выполняется следующее количество действий:

$$MGM^2_{SC}(\mathrm{m_U}, m_D):\ m_U C^{GS} n_x n_y (\frac{1}{2^{k_x-1}}+\ldots+\frac{1}{2})+n_x n_y((2m_U+2m_D)C^{GS}+C^S)\frac{n!}{r!(n-r)!},$$

$$MGM^3_{SC}(\mathrm{m_U}, m_D):\ m_U C^{GS} n_x n_y + n_x n_y((2m_U+2m_D)C^{GS}+C^S)(\frac{1}{2^{k_y-1}}+\ldots+\frac{1}{2}),$$

$$MGM^4_{SC}(\mathrm{m_U}, m_D):\ n_x n_y((2m_U+2m_D)C^{GS}+C^S)(\frac{1}{2^{k_y-1}}+\ldots+\frac{1}{2}+1).$$

Упростим данные выражения и объединим результаты в таблице 1. Из этой таблицы видно, насколько $MGM^4_{SC}(\mathrm{m_U}, m_D)$ «дороже» других итераций. Ввиду оценки (3) определения многосеточных итераций $MGM^k_{SC}(\mathrm{m_U}, m_D), k=1,2,3,4$ и оценок их стоимости представляется разумным исследовать эффективность методов $MGM^k_{SC}(\frac{3}{2},\frac{1}{2}), k=1,2,4.$

Таблица 1

Стоимость многосеточных итераций $MGM^k_{SC}(m_U, m_D)$, $N \equiv n_x n_y$

Название итерации	Стоимость итерации	$m_U = m_D = m$	$m_U = \frac{3}{2}, m_D = \frac{1}{2}$
MGM^1_{SC}	$N \cdot ((2m_D+2m_U)C^{GS}+C^S)$	$N \cdot (4mC^{GS}+C^S)$	$N \cdot (4C^{GS}+C^S)$
MGM^2_{SC}	$N \cdot ((4m_D+3m_U)C^{GS}+2C^S)$	$N \cdot (7mC^{GS}+2C^S)$	$N \cdot (6{,}5C^{GS}+2C^S)$
MGM^3_{SC}	$N \cdot ((4m_D+3m_U)C^{GS}+2C^S)$.	$N \cdot (7mC^{GS}+2C^S)$	$N \cdot (6{,}5C^{GS}+2C^S)$
MGM^4_{SC}	$N \cdot ((6m_D+4m_U)C^{GS}+3C^S)$	$N \cdot (10mC^{GS}+3C^S)$	$N \cdot (9C^{GS}+3C^S)$

3. Численные результаты

В [7] показано, что наибольшую трудность в решении задачи (1), (4) методом $MGM^1_{SC}(\mathrm{m_U}, m_D)$ при различных способах построения матриц вспомогательных систем вызывают случаи, соответствующие дифференциальному уравнению с быстро меняющимися коэффициентами:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-f,\ (x,y)\in D=(0;1)\times(0;1) \qquad (7)$$

Будем предполагать, что в системе (1), (4) $n_x = n_y = n$ матрицы вспомогательных систем строятся по правилу (5), оператор продолжения соответствует шаблону $p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Введем следующие обозначения:

$$\left\|\mathbf{r}^{(k)}\right\| = \sum_{i,j=1}^{n}\left|r_{i,j}^{(k)}\right|,\ v_k = \left\|\mathbf{r}^{(k)}\right\| / \left\|\mathbf{r}^{(k-1)}\right\|,\ \rho = \lim_{k\to+\infty} v_k\,,$$

где $\mathbf{r}^{(k)}$ — невязка после k-й многосеточной итерации. Значение скорости сходимости ρ вычислялось в момент, когда первоначальная невязка уменьшилась не менее, чем в 10^{10} раз; v_k^j, $j = 1, 2, 4,$ — скорость сходимости $MGM^j_{SC}(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ на k-й итерации.

Таблица 2

Скорость сходимости и количество итераций $MGM^j_{SC}(\frac{3}{2},\frac{1}{2}),\ j = 1, 2, 4,$

в зависимости от коэффициентов системы и мелкости сетки

$p(x,y), q(x,y)$	n	64	512	1024
$p(x,y)=1$ $q(x,y)=1$	$v_k^1\ (k)$	0,0838 (9)	0,0876 (9)	0,0879 (9)
	$v_k^2\ (k)$	0,0005 (4)	0,0004 (4)	0,0004 (4)
	$v_k^4\ (k)$	0,0005 (4)	0,0004 (4)	0,0004 (4)
$p(x,y)=1-e^{-x\cdot y}$ $q(x,y)=1+$ $+0,8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$	$v_k^1\ (k)$	0,1106 (11)	0,1193 (11)	0,1193 (11)
	$v_k^2\ (k)$	0,0093 (6)	0,0114 (6)	0,0114 (6)
	$v_k^4\ (k)$	0,0040 (5)	0,0041 (5)	0,0043 (5)
$p(x,y)=1+$ $+0,8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$ $q(x,y)=1-e^{-x\cdot y}$	$v_k^1\ (k)$	0,1763 (13)	0,1998 (14)	0,2001 (14)
	$v_k^2\ (k)$	0,0128 (6)	0,0153 (6)	0,0154 (6)
	$v_k^4\ (k)$	0,0043 (5)	0,0006 (4)	0,0004 (4)

Из таблицы 2 очевидно преимущество $MGM^2_{SC}(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$, $MGM^4_{SC}(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ по скорости сходимости в сравнении с $MGM^1_{SC}(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$. Используя еще результаты из таблицы 1, можно оценить объем работы каждым методом для уменьшения первоначальной невязки не менее, чем в 10^{10} раз.

Таблица 3

Количество арифметических действий методами $MGM_{SC}^{j}(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$, $j=1,2,4$, для уменьшения первоначальной невязки не менее чем в 10^{10} раз

$p(x,y)$, $q(x,y)$	MGM	Количество арифметических действий
$p(x,y)=1$ $q(x,y)=1$	MGM_{SC}^{1}	$N\cdot(36C^{GS}+9C^{S})$
	MGM_{SC}^{2}	$N\cdot(26C^{GS}+8C^{S})$
	MGM_{SC}^{4}	$N\cdot(36C^{GS}+12C^{S})$
$p(x,y)=1-e^{-x\cdot y}$ $q(x,y)=1+$ $+0,8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$	MGM_{SC}^{1}	$N\cdot(44C^{GS}+11C^{S})$
	MGM_{SC}^{2}	$N\cdot(39C^{GS}+12C^{S})$
	MGM_{SC}^{4}	$N\cdot(45C^{GS}+15C^{S})$
$p(x,y)=1+$ $+0,8\sin(14\pi x)\sin(14\pi y)$ $q(x,y)=1-e^{-x\cdot y}$	MGM_{SC}^{1}	$N\cdot(56C^{GS}+14C^{S})$
	MGM_{SC}^{2}	$N\cdot(39C^{GS}+12C^{S})$
	MGM_{SC}^{4}	$N\cdot(36C^{GS}+12C^{S})$

Видно, что MGM_{SC}^{2} в любом случае экономичнее MGM_{SC}^{1} и во многих — MGM_{SC}^{4}. Метод MGM_{SC}^{4} наиболее экономичен, но только в отдельных случаях экономичнее MGM_{SC}^{2} и не дает преимуществ в большинстве случаев выбора коэффициентов $p(x, y)$, $q(x, y)$ в уравнении (7).

Список литературы

1. *Mandel J., McCormick S., Ruge J.* An algebraic theory for the multi-grid method including V-cycle // SIAM J. Numer. Anal. 1983. Vol. 20.

2. *Hackbusch W.* Multi-Grid Method and Applications. Springer, 1985.

3. *Maitre J.-F., Musy F.* Multigrid Methods for Symmetric Variational Problems: A General Theory and Convergence Estimates for Usual Smoothers // Appl. Math. and Comp. 1987. Vol. 21.

4. *Ольшанский М. А.* Лекции и упражнения по многосеточным методам. М., 2005.

5. *Белякова О. В., Буздин А. А.* Многосеточный метод с полуукрупнением для решения систем с блочной трехдиагональной матрицей // Методы вычислений. 2005. № 21. С. 5—19.

6. *Буздин А. А., Дедух С. С.* Вариант многосеточного метода с полуукрупнением сетки // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2009. Вып. 10. С. 74—81.

7. *Белякова О. В.* Вариант многосеточного метода с полуукрупнением // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2012. Вып. 10. С. 102—109.

Об авторе

Ольга Владиславовна Белякова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: obelyakova@yandex.ru

About the author

Dr Olga Belyakova — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: obelyakova@yandex.ru